Leçon 218 : Formules de Taylor. Exemples et applications

Références : Rombaldi (Ana Rocha), Gourdon, Chabanol + Zuily-Queffélec (DEV 1), Demailly Rouvière (DEV 2)

I - Les formules de Taylor

1) Préliminaires

2) Fonctions d'une variable réelle

3) Fonctions de plusieurs variables - Optimisation

II - Développements limités et séries de Taylor

1) Etude locale

2) Développements en série entière

III - Applications

1) En probabilités

2) Intégration numérique

3) Méthode de Newton

DEV 1 : Lévy + TCL

DEV 2 : Méthode de Newton

Leçon 218 : Formules de Taylor. Exemples et applications

Dans cette leçon $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $I \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$. $a < b \in \mathbb{R}$.

I - Les formules de Taylor

1) Préliminaires (Rom)

THM 1 : Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors, f est bornée et atteint ses bornes.

THM 2 : (Rolle) Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a;b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a;b[$, $f'(c) = 0$.

REM 3 : Aucune hypothèse n'est superflue dans ce théorème.

THM 4 : (Darboux) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors $f'(I)$ est un intervalle.

THM 5 : (Accroissements finis) Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue dérivable sur $]a;b[$. $\exists c \in]a;b[$, $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

COR 6 : Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue dérivable sur $]a;b[$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq M$. Alors, f est M-lipschitzienne

2) Fonctions d'une variable réelle [Rom]

THM 7 : (Taylor-Lagrange) Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^n$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a;b[$. Alors :

$$\exists c \in]a;b[, \quad f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

EX 8 : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

THM 9 (Inégalité de Taylor-Lagrange) Soit $f : [a;b] \to E$ de classe $\mathcal{C}^n$, $n+1$ fois dérivable sur $]a;b[$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$. On suppose que :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in]a;b[, \ \|f'(x)\| \leq M. \text{ Alors :}$$

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right\| \leq \frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

THM 10 : (Taylor avec reste intégral) : Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}^p$ définie et de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a;b]$. Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n \, dt$$

2) Fonctions de plusieurs variables - Optimisation [Rom] [Gou]

REM 11 : Pour $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suffisamment dérivable, on retrouve les formules de Taylor pour f en $a \in U$ en considérant $\varphi : t \mapsto f(a + th)$.

REM 12 : Les théorèmes de Rolle et des accroissements finis sont faux lorsque f est à valeurs dans un $\mathbb{R}$-evn :
$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$ vérifie $f(0) = f(2\pi)$ mais $f' \neq 0$ sur $[0, 2\pi]$

NOT 13 : Pour $f : V \subset \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur U ouvert

$$\forall n \in [\![1, k]\!], \quad \left[\sum_{i=1}^{q} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right]^{(n)} = \sum_{i_1 + \dots + i_q = n} \frac{n!}{i_1! \dots i_q!} h_1^{i_1} \dots h_q^{i_q} \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_q^{i_q}}(a)$$

THM 14 : (Taylor-Lagrange) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^p$ sur U ouvert, $x \in \mathbb{R}^n$, $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $[x; x+h] \subset U$.

$$\exists \theta \in]0,1[, \ f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2!}\left[\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right]^{(2)} + \dots + \frac{1}{p!}\left[\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta h)\right]^{[p]}$$

EX 15 : Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^2$ alors pour $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, il existe $\theta \in]0,1[$

$$f(h,k) = f(0,0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + \frac{1}{2}\left[h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\theta h, \theta k) + 2kh \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\theta h, \theta k) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\theta h, \theta k)\right] + o(\|(h,k)\|_2^2).$$

THM 16 : (Taylor avec reste intégral) $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^k$, $x \in U$. Alors, lorsque $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, $[x; x+h] \subset U$,

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2!}\left[\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right]^{[2]} + \dots + \frac{1}{(k-1)!}\left[\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right]^{[k-1]} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}\left[\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+th)\right]^{[k]} dt$$

THM 17. $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in U$ tel que $df(a) = 0$.

. Si $d^2 f(a)$ est définie positive (resp. négative), f admet un minimum (resp. maximum) local strict en a.

. Si $d^2 f(a)$ est de signature (p, q), $p > 0$, $q > 0$, alors a est un point selle de f.

II - Développements limités et séries de Taylor

1) Etude locale [Gou] [Rom]

DEF 18 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a lorsqu'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de a,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n).$$

PROP 19 : Si f admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ en a (noté $DL_n(a)$), il est unique.

PROP 20 : f admet un $DL_0(a)$ si et seulement si f admet une limite l en a. Dans ce cas, $f(x) = l + \underset{x \to a}{o}(1)$.

PROP 21 : f admet un $DL_1(a)$ si et seulement si f est dérivable en a. Dans ce cas, $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$

REM 22 : Même lorsque f admet un $DL_n(a)$ avec $n \geq 2$, f n'est pas forcément 2 fois dérivable en a ! Par exemple,

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 + x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

n'est pas 2 fois dérivable en 0, pourtant, $f(x) = 1 + x + x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$

THM 23 : (Taylor-Young) Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \mathring{I}$. Si f est n fois dérivable en a, elle admet un $DL_n(a)$ et :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n)$$

EX 24 : On obtient alors le $DL_n(0)$ des fonctions usuelles :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \; ; \; \cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}) \; ;$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i) \right) x^k + o(x^n) \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}).$$

APPLI 25 : Les développements limités à l'infini permettent d'obtenir la position de la courbe par rapport aux asymptotes si on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x^n}\right) ; \; \frac{f(x)}{x} = \frac{a_p}{x^{p-1}}(1 + o(1)) \text{ où } a_p \neq 0$$

La droite d'équation $y = a_1 + a_0 x$ est asymptote à la courbe et le signe de a_p permet d'avoir la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

2) Développements en série entière (DSE) [Rom]

DEF 26 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est développable en série entière en a lorsqu'il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum a_n x^n$ a un rayon $R > 0$ et $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in]-r ; r[, \; f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

DEF 27 : On appelle série de Taylor associée à f en a la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$.

PROP 28 : Si f est développable en série entière au voisinage de 0, alors f est $\mathcal{C}^\infty$ sur ce voisinage et égale, sur ce voisinage, à sa série de Taylor en 0. Un développement en série entière est donc unique.

REM 29 : Si f est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ peut être de rayon nul ou converger vers une autre fonction que f.
En effet, $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$
$\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$ donc $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge vers $g = 0 \neq f$.

THM 30 : Soit $f : J \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ (J voisinage ouvert de 0)
f est DSE en 0 $\iff \exists r > 0$, $]-r ; r[\subset J$ et $R_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $x \in]-r ; r[$ où $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Dans ce cas, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ et le rayon de convergence de cette série est supérieur ou égal à r.

COR 31 : Soit f $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage ouvert J de 0. On suppose que : $\exists r > 0$, $]-r ; r[\subset J$, $\forall x \in]-r ; r[$, $\exists M_x > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}(x)| \leq M_x$. Alors f est DSE sur $]-r ; r[$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

LEMME 32 : Soit $f :]-a ; a[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ $a > 0$. Si f est paire et si : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-a ; a[$, $f^{(2k)}(x) \geq 0$, alors f est DSE sur $]-a ; a[$.

THM 33 : (Bernstein) Soit $f :]-a ; a[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, $a > 0$. Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]-a ; a[$, $f^{(2k)}(x) \geq 0$, f est alors développable en série entière sur $]-a ; a[$.

THM 34 : Soit $f :]-a ; a[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, $a > 0$. Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]-a ; a[$, $f^{(k)}(x) \geq 0$, f est DSE sur $]-a ; a[$.

III - Applications

1) En probabilités [CHA] [Z-Q]

DEF 35: Soit X une variable aléatoire réelle (v.a.r). On définit la fonction caractéristique de X par $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = E[e^{itX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \, dP_X(x)$.

DEF 36: Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r et X une v.a.r. On dit que (X_n) converge en loi et on note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ lorsque $\forall \varphi \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$, $E[\varphi(X_n)] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} E[\varphi(X)]$.

REM 37: On peut remplacer $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$ par $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$ dans DEF 36.

THM 38 (Lévy) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r et X une v.a.r.
$X_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} X \iff \forall t \in \mathbb{R}, \ \phi_{X_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi_X(t)$

DEV 1

PROP 39: On a $\phi_X(0) = 1$. De plus, si pour $k \geq 1$, $X^k \in L^1$, les dérivées en 0 de ϕ_X existent jusqu'à l'ordre k et
$$\phi_X^{(k)}(0) = i^k E[X^k].$$
En particulier, on a $\phi_X'(0) = iE[X]$ et $\phi_X''(0) = -E[X^2]$.

THM 40: (Central Limite) : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r de carré intégrable indépendantes identiquement distribuées. Soit $m = E[X_1]$, $\sigma^2 = Var(X_1)$, $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} X_k$
$$\frac{\overline{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{Loi}} Z \text{ où } Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

LEMME 41: Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z$. Alors $\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^z$.

2) Intégration numérique [DEM]

Soit $f : [\alpha;\beta] \to \mathbb{R}$ continue. On cherche des formules approchées pour $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$. Pour cela, on subdivise
$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k = \beta$ et on a $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\,dx$

DEF 42: On appelle méthode de quadrature élémentaire l'approximation $\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\,dx \simeq (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \sum_{j=0} \omega_{i,j} f(\xi_{i,j})$
$\xi_{i,j} \in [\alpha_i;\alpha_{i+1}]$, $0 \leq j \leq l_i$, $\sum_{j=0} \omega_{i,j} = 1$

DEF 43: La méthode de Newton-Cotes de rang l consiste à prendre $l_i = l$ pour tout i et $\xi_{i,j}$ équidistants :
$$\xi_{i,j} = \alpha_i + j\,\frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{l}$$

EX 44: On a la méthode des rectangles à gauche : $\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\,dx \simeq (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(\alpha_i)$

Méthode des trapèzes : $\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\,dx \simeq \left(\frac{1}{2} f(\alpha_i) + \frac{1}{2} f(\alpha_{i+1})\right)(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$

Méthode de Simpson : $\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\,dx \simeq \left(\frac{1}{6} f(\alpha_i) + \frac{2}{3} f\left(\frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2}\right) + \frac{1}{6} f(\alpha_{i+1})\right)(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$

PROP 45: On évalue l'erreur $E(f) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{k-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \sum_{j=0}^{l_i} \omega_{i,j} f(\xi_{i,j})$

- Pour les trapèzes, $E(f) = -\frac{1}{12} h^2 f''(\xi)(\beta - \alpha)$
- Pour Simpson : $E(f) = -\frac{1}{2880} h^4 f^{(4)}(\xi)(\beta - \alpha)$

3) Méthode de Newton

Soit $f : [c;d] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose $c < d$, $f(c) < 0 < f(d)$ et pour tout $x \in [c;d]$, $f'(x) > 0$. On considère la suite récurrente $x_{n+1} = F(x_n)$ avec $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

DEV 2

PROP 46: f a un unique zéro $a \in]c;d[$. Pour tout $x \in [c;d]$, il existe $z \in [a;x]$, $F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2$

COR 47: $\exists C > 0$, $\forall x \in [c;d]$, $|F(x) - a| \leq C|x - a|^2$
$\exists \alpha > 0$, $I = [a-\alpha; a+\alpha]$ est stable par F. Pour tout $x_0 \in I$, la suite (x_n) converge quadratiquement vers $a \in I$.

PROP 48: On suppose de plus $f'' > 0$ sur $[c;d]$. Alors $I = [a;d]$ est stable par F et pour tout $x_0 \in I$, (x_n) est strictement croissante (ou constante) avec
$$0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$$
$$x_{n+1} - a \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2 \quad (x_0 > a)$$

APPLI 49: On peut alors estimer $\sqrt{y}$ avec $y > 0$